УДК 517.947

М.М. Кухарчук, М.І. Яременко

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З МАТРИЦЕЮ ГІЛЬБЕРГА–СЕРРІНА В ПРОСТОРАХ СОБОЛЄВА

Вступ

В статті досліджується квазілінійне еліптичне рівняння за досить загальних умов. Одержані такі основні результати:

а) доведено розв'язність таких рівнянь у шкалі соболєвих просторів W_1^p, $p > 2$;

б) досліджено гладкість розв'язків залежно від диференціальних властивостей заданих функцій;

в) введено гладку апроксимацію еліптичного рівняння, доведено теореми про слабку і сильну збіжність наближених розв'язків у просторі W_1^p до розв'язків рівняння;

г) введено оператори $-\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \to L^p$, які є генераторами нелінійних напівгруп стиску в L_p.

Постановка задачі

У даній статті ставилася мета – дослідити квазілінійне еліптичне рівняння у всьому евклідовому просторі.

Зв'язок між формами h_λ^p і операторами A_λ^p, породженими цими формами

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\lambda u - d \circ a \circ du + b(x, u, \nabla u) = f, \ \ \lambda > 0,$$

$$\forall f \in L^\infty \cap L^1, \tag{1}$$

де a – відома матриця Гільберга–Серріна:

$$a = \left(\delta_{ij} + b \frac{x_i x_j}{|x|^2} \right), \ \ b = -1 + \frac{l-1}{1-\chi}, \ \chi < 1, \ l \geq 3,$$

за обмежень $\forall f \in L^\infty \cap L^1$

$$|b(x, u, \nabla u)| \leq \mu_1(x)|\nabla u| + \mu_2(x)|u| + \mu_3(x),$$

$$|b(x, u, \nabla u) - b(x, v, \nabla v)| \leq$$
$$\leq \mu_4(x)|u - v| + \mu_5(x)|\nabla(u - v)|,$$

$$|b^r(x, u, \nabla u)| \leq \mu_6(x)|\nabla u| + \mu_7(x)|u| + \mu_8(x), \tag{2}$$

$$|b^u(x, u, \nabla u)| \leq \mu_9(x)|u| + \mu_{10}(x),$$

$$|b^{\nabla u}(x, u, \nabla u)| \leq \mu_{11}(x),$$

де $\mu_i \in L_\infty(R^n)$, $i = 1, \ldots, 14$, $\mu_3 \in L_p(R^n)$, $\mu_1^2 \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_{11}(x) \in L_1 \cap L_\infty$, або можливий випадок, коли $\mu_1^2, \mu_2^2 \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_3 \in L_p(R^l)$, $\mu_i \in L_\infty(R^n)$, $i = 3, \ldots, 11$; $b(x, y, z)$ – неперервна на $R^l \times R \times R^l$ скалярна функція, неперервно диференційовна по (y, z); $b^u(x, u, \nabla u)$ – за визначенням, похідна функції $b(x, y, z)$ по другому аргументу; $b^{\nabla u}(x, u, \nabla u)$ – за визначенням, похідна функції $b(x, y, z)$ по третьому аргументу

$$da = b(l-1)\frac{x}{|x|^2}, \ \ da \circ a^{-1} \circ da = (1+b)^{-1}\left(\frac{l-1}{|x|}\right)^2.$$

Введемо простір $W_1^p(R^l, d^l x) =: \{v \,|\, v \in L^p(R^l, d^l x), D_i v \in L^p(R^l, d^l x), i = 1, \ldots, l\}$,

$$\|v\|_{W_1^p(R^l, d^l x)} = \|v\|_{L^p(R^l, d^l x)} + \sum_i \|D_i v\|_{L^p(R^l, d^l x)},$$

де $W_{1,0}^p(R^l, d^l x) =: \{v \,|\, v \in W_1^p(R^l, d^l x)$ і має компактний носій$\}$; $W_{-1}^q(R^l, d^l x)$ – спряжений до $W_{1,0}^p(R^l, d^l x)$ простір.

У статті буде використовуватися клас функцій $\Pi K_\beta(-\Delta)$, $v^2 \in \Pi K_\beta(-\Delta)$ [1, 2], тоді і тільки тоді, коли $v^2 \in L_{\mathrm{loc}}^1(R^l)$ і існують такі константи β і $c(\beta)$, що

$$\|v\varphi\|_2^2 \leq \beta \|\nabla \varphi\|_2^2 + c(\beta)\|\varphi\|_2^2 \tag{3}$$

для довільної $\varphi \in C_0^\infty(R^l)$.

Тоді за рівнянням (1) складаємо форму $h_\lambda^p(u, v)$ за визначенням:

$$h_\lambda^p(u, v) \equiv \lambda\langle u, v\rangle + \langle dv \circ a \circ du\rangle + \langle b(x, u, \nabla u), v\rangle, \tag{4}$$

де $v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Лема 1. Форма h_λ^p, побудована за лівою частиною рівняння (1), обмежена.

Доведення. Застосовуючи нерівність Гельдера та Юнга, знаходимо оцінку

$$|h_\lambda^p(u,v)| \le \lambda|\langle u,v\rangle| + |\langle dv\circ a\circ du\rangle| + |\langle b,v\rangle| \le$$

$$\le \lambda\|u\|_p\|v\|_p + (\langle du\circ a\circ du\rangle)^{\frac{1}{p}}(\langle dv\circ a\circ dv\rangle)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+|\langle \mu_1|\nabla u| + \mu_2|u| + \mu_3, v\rangle| \le \lambda\|u\|_p\|v\|_q +$$

$$+M\|\nabla u\|_p\|\nabla v\|_q + \|\mu_1\|_\infty\|\nabla u\|_p\|v\|_q +$$

$$+\|\mu_2\|_\infty\|u\|_p\|v\|_q + \|\mu_3\|_p\|v\|_q \le$$

$$\le K\|u\|_{W_1^p}\|v\|_{W_1^q},$$

тобто форма обмежена.

Лема доведена.

Як наслідок цієї леми одержимо, що форма породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^lx) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^lx)$, який є обмеженим. Дійсно, оскільки $h_\lambda^p : W_1^p \times W_1^q \to R$ є обмеженим та лінійним відображенням по другому аргументу, то, отже, форма згідно з теоремою Банаха породжує оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^lx) \to W_{-1}^p(R^l, d^lx)$, тому можемо записати $h_\lambda^p(u,v) = \langle A_\lambda^p(u), v\rangle$.

Лема 2. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^lx) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^lx)$ – коерцитивне відображення.

Доведення. Під коерцитивним відображенням розуміємо такий оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^lx) \to W_{-1}^p(R^l, d^lx)$, який породжений формою і задовольняє таку умову:

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^{p'}}\to\infty} \frac{h_\lambda^p(u, u|u|^{p-2})}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^{p'}}} = \infty. \qquad (5)$$

Справді, має місце оцінка

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2}) \ge \lambda\|u\|_p^p +$$

$$+(p-1)\langle du\circ a\circ du, |u|^{p-2}\rangle - \frac{1}{p}\|\mu_1\|_\infty\|\nabla u\|_p^p -$$

$$-\|\mu_1\|_\infty\frac{p-1}{p}\|u\|_p^p - \|\mu_2\|_\infty\|u\|_p^p -$$

$$-\|\mu_3\|_p\frac{p-1}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p, \qquad (6)$$

для одержання якої застосовані нерівності Гельдера та Юнга, а також деякі властивості норм L_p.

Застосовуючи ще раз нерівності Гельдера та Юнга, а також невід'ємність норм, одержуємо

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2}) \ge$$

$$\ge\left(\lambda - \|\mu_1\|_\infty\frac{p-1}{p} - \|\mu_2\|_\infty - \|\mu_3\|_\infty\frac{p-1}{p}\right)\|u\|_p^p +$$

$$+\left((p-1)C_1\frac{1}{p} - \frac{1}{p}C_2\right)\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p$$

або

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2}) = \lambda\|u\|_p^p +$$

$$+\frac{4}{p^2}(p-1)\left\langle d\left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a\circ d\left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle +$$

$$+\langle b(x,u,\nabla u), u|u|^{p-2}\rangle.$$

Маємо оцінку

$$|\langle b, u|u|^{p-2}\rangle| \le \langle \mu_1|\nabla u| + \mu_2|u| + \mu_3, u|u|^{p-2}\rangle \le$$

$$\le \frac{2}{p}\|\nabla W\|_2\|\mu_1 W\| + \|\mu_2 W\|_2\|W\|_2 +$$

$$+(\|W\|_2^2)^{\frac{p-1}{p}}\|\mu_3\|_p \le \left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta} + c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{p}\right)\|W\|_2^2 + \sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle + \frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Тоді одержимо

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})| \ge$$

$$\ge\left(\lambda - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta} + c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{p}\right)\right)\|W\|_2^2 +$$

$$+\left(\frac{4(p-1)}{p^2} - \sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle - \frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p,$$

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty}\frac{h_\lambda^p(u,u|p|^{p-2})}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}} \ge$$

$$\ge \lim_{\|W\|_2^2\ge\infty}\left(\frac{\left(\lambda - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta} + c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{p}\right)\right)\|W\|_2^2}{\|W\|_2^{\frac{2}{q}} + \left(1-\frac{2}{p}\right)\|W\|_2^{\frac{2}{q}-1}\|\nabla W\|_2} + \right.$$

$$+\left.\frac{\left(\frac{4(p-1)}{p^2}-\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle-\frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p}{\|W\|_2^{\frac{2}{q}}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\|W\|_2^{\frac{2}{q}-1}\|\nabla W\|_2}\right)=$$

$$=\infty.$$

Лема доведена.

Лема 3. Форма h_λ^p, побудована за лівою частиною рівняння (1), обмежена за умов μ_1^2, $\mu_2^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_3\in L_p(R^l)$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, маємо

$$|h_\lambda^p(u,v)|\le\lambda\|u\|_p\|v\|_q+k\|\nabla u\|_p\|\nabla v\|_q+$$
$$+\langle\mu_1|\nabla u|+\mu_2|u|+\mu_3,v\rangle\le\lambda\|u\|_p\|v\|_q+$$
$$+k\|\nabla u\|_p\|\nabla v\|_q+\|\mu_3\|_p\|v\|_q+\|\mu_1 v\|_q\|\nabla u\|_p+$$
$$+\|\mu_2 v\|_q\|u\|_p$$

або

$$|h_\lambda^p(u,v)|\le h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})\le\lambda\|W\|_2^2+$$
$$+\frac{4}{p^2}(p-1)N_1\|\nabla W\|_2^2+\langle\mu_1|\nabla W|+\mu_2 W,W\rangle+$$
$$+\frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p+\frac{1}{q}\|W\|_2^2\le\left(\lambda+\frac{c(\beta)}{p}+\frac{c(\beta)}{2}+\frac{1}{q}\right)\|W\|_2^2+$$
$$+\left(\frac{4}{p^2}(p-1)N_1+\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\beta\right)\|\nabla W\|_2^2+\frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Лема доведена.

***Зауваження* 1**. Щодо структури рівняння (1), то умови (2) можуть бути значно послаблені, а саме $\mu_1^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_2^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_3\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^l)$.

***Зауваження* 2**. Якщо припустити, що $\mu_1^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_2^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$ і $\mu_3\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^l)$, тоді лему 2 можна одержати у вигляді леми 3.

Лема 4. Оператор $A_\lambda^p: W_1^p(R^l,d^lx)\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ – коерцитивне відображення за умов, що $\mu_1^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_2^2\in L_1^{\mathrm{loc}}(R^l)$, $\mu_3\in L_p^{\mathrm{loc}}(R^l)$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, маємо

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})=$$
$$=\lambda\|u\|_p^p+\frac{4}{p^2}(p-1)\left\langle d\left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a\circ d\left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}\right)+\right.$$
$$\left.+\langle b(x,u,\nabla u),u|u|^{p-2}\right\rangle.$$

Покладаючи $W=u|u|^{\frac{p-2}{2}}$, оцінюємо

$$|\langle b,u|u|^{p-2}\rangle|\le\langle\mu_1|\nabla u|+\mu_2|u|+\mu_3,u|u|^{p-2}\rangle\le$$
$$\le\frac{2}{p}\|\nabla W\|_2\|\mu_1 W\|+\|\mu_2 W\|_2\|W\|_2+$$
$$+(\|W\|_2^2)^{\frac{p-1}{p}}\|\mu_3\|_p\le\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta}+c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon}{p}\right)\|W\|_2^2+\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle+\frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p.$$

Отже, отримуємо

$$h_\lambda^p(u,u|u|^{p-2})|\ge$$
$$\ge\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta}+c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{p}\right)\right)\|W\|_2^2+$$
$$+\left(\frac{4(p-1)}{p^2}-\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle-\frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p,$$

тобто

$$\lim_{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty}\frac{h_\lambda^p(u,u|p|^{p-2})}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}}\ge$$
$$\ge\lim_{\|W\|_2^2\ge\infty}\left(\frac{\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta}+c(\beta)\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{p}\right)\right)\|W\|_2^2}{\|W\|_2^{\frac{2}{q}}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\|W\|_2^{\frac{2}{q}-1}\|\nabla W\|_2}+\right.$$
$$+\left.\frac{\left(\frac{4(p-1)}{p^2}-\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{p}+\frac{3}{2}\right)\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle-\frac{1}{\varepsilon p}\|\mu_3\|_p^p}{\|W\|_2^{\frac{2}{q}}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\|W\|_2^{\frac{2}{q}-1}\|\nabla W\|_2}\right)=$$
$$=\infty.$$

Лема доведена.

Лема 5. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — акретивне відображення в L_p.

Доведення. Згідно з означенням акретивності [3, 4] оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — акретивний в L_p, якщо $\langle A_\lambda^p(u) - - A_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \ge 0 \ \ \forall u, v \in W_1^p$.

Отже, враховуючи умови (2) та виконуючи перетворення, аналогічні перетворенням при доведенні леми 3, маємо

$$\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \ge \lambda \|u-v\|_p^p +$$

$$+ (p-1)\langle d(u-v) \circ a \circ d(u-v), |u-v|^{p-2}\rangle -$$

$$- \langle \mu_4 |u-v| + \mu_5 |\nabla(u-v)|, (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge \lambda \|W\|_2^2 + 4\frac{(p-1)}{p^2}\langle dW \circ a \circ dW\rangle -$$

$$- \langle \mu_4 W, W\rangle - \frac{2}{p}\langle \mu_5 \nabla W, W\rangle \ge$$

$$\ge \left(\lambda - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta} + \frac{c(\sqrt{\beta})}{\sqrt{\beta}} + \frac{2}{p\sqrt{\beta}}c(\beta)\right)\right)\|W\|_2^2 +$$

$$+\left(4\frac{(p-1)}{p^2} - \frac{\sqrt{\beta}}{2} - \frac{2}{p}\sqrt{\beta}\right)\langle dW \circ a \circ dW\rangle \ge 0,$$

оскільки

$$|\langle \mu_4 W, W\rangle| \le \|W\|_2 \|\mu_4 W\|_2 \le$$

$$\le \|W\|_2 (\beta\langle dW \circ a \circ dW\rangle + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\varepsilon\|W\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\beta\langle dW \circ a \circ dW\rangle + c(\beta)\|W\|_2^2)) \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\beta}\langle dW \circ a \circ dW\rangle + \left(\sqrt{\beta} + \frac{c\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}\right)\|W\|_2^2\right),$$

$$|\langle \mu_5 \nabla W, W\rangle| \le$$

$$\le \langle dW \circ a \circ dW\rangle^{\frac{1}{2}} (\beta\langle dW \circ a \circ dW\rangle + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\varepsilon\beta\langle dW \circ a \circ dW\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle dW \circ a \circ dW\rangle + \right.$$

$$\left. + \varepsilon c(\beta)\|W\|_2^2\right) \le \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\beta}\langle dW \circ a \circ dW\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{c(\beta)}{\sqrt{\beta}}\|W\|_2^2\right) \text{ при } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$

де $W = (u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}$ і знак рівності справедливий лише у випадку $u \equiv v$.

Лема доведена.

Лема 6. Оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — хемінеперервне відображення.

Доведення. За визначенням, оператор $A_\lambda^p : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — хемінеперервне відображення, якщо $\forall u, v \in W_1^p$ $\omega - - \lim_{t\to 0} A_\lambda^p(u + tv) = A_\lambda^p(u)$ в нормі W_{-1}^p.

Отже, можемо написати такі оцінки:

$$|\langle A_\lambda^p(u+tv) - A_\lambda^p(u), W\rangle| = \lambda|t\langle v, W\rangle| +$$

$$+ |t\langle dW \circ a \circ dv\rangle| + |\langle (b(x,(u+tv), \nabla(u+tv)) -$$

$$- b(x, u, \nabla u)), W\rangle| \le \lambda t|\langle v, W\rangle| + t|\langle dW \circ a \circ dv\rangle| +$$

$$+ t|\langle \mu_4 v, W\rangle| + t|\langle \mu_5 \nabla v, W\rangle| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\forall W \in W_{1,0}^{p'},$$

що й доводить лему.

Якщо в умовах (2) умову

$$|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \le$$

$$\le \mu_4(x)|u-v| + \mu_5(x)|\nabla(u-v)|,$$

замінити на умову

$$|b(x,u,\nabla u) - b(x,v,\nabla v)| \le$$

$$\le \tilde{\mu}_4(x)|u-v|^\gamma + \tilde{\mu}_5(x)\nabla|(u-v)|,$$

то оператор уже не буде акретивним, але для нього справджуватиметься таке твердження:

$$\langle A_\lambda^p(u) - A_\lambda^p(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \ge$$

$$\ge -C_1(\|u-v\|_{W_l^p}).$$

Означення. Оператор $A_\lambda^p(\cdot) : W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ називається псевдоакретивним або оператором напівобмеженої варіації в L^p, якщо

$$\langle A_{\lambda}^{p}(u) - A_{\lambda}^{p}(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \geq$$
$$\geq -c\left(\|(u-v)\,|u-v|^{\frac{p-2}{2}}\|_{W_1^p}\right),$$

де $c(\rho)\ \forall \rho > 0$ — неперервна додаткова функція, що задовольняє умову $\lim\limits_{t\to 0}\frac{c(\rho t)}{t^{p-1}} = 0$.

Лема 7. Оператор $A_{\lambda}^{p}: W_1^p(R^l, d^l x) \to \to W_{-1}^{p}(R^l, d^l x)$ задовольняє умову напівобмеженої варіації:

$$\langle A_{\lambda}^{p}(u) - A_{\lambda}^{p}(v), (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle \geq -C_1(\|u-v\|_{W_1^p}).$$

Теореми про існування розв'язку

Теорема 1. Рівняння (1) за умов (2) однозначно розв'язне в $W_1^p\ \ \forall f \in L^{\infty} \cap L^1$.

Д о в е д е н н я. Для доведення цієї теореми використаємо модернізацію методу Гальоркіна про апроксимацію рівняння (1) гладкими апроксимаціями. Введемо визначення "зрізки" функції $u(x)$. Нехай $u(x)$ — вимірна за Лебегом функція на R^l. Позначимо u_{ϑ} і s_{ϑ} зрізку і її носій:

$$u_{\vartheta} = \begin{cases} u-\vartheta,\ u \geq \vartheta, \\ 0,\ |u| \leq \vartheta, \\ u+\vartheta, u < -\vartheta, \end{cases}$$

$$s_{\vartheta}(u) = \{x \in R^l \,\|u(x)| > \vartheta\},\ \ \vartheta > 0.$$

Розглянемо гладку апроксимацію функцій $a^m(x), b^m(x,y,z)$, $f^m(x)$ по аргументу x:

$$a_i^{n,m}(x) = \int\limits_{R^l} \rho_n(x-t) a_i^m(t)dt = \rho_n * a_i^m, \tag{7}$$

де $\rho_n(t)$ — гладка невід'ємна апроксимація (1) в R^l.

Нехай $a^m(x)$, $f^m(x)$, $b^m(x,y,z)$ — зрізки по аргументу x функцій $a(x)\ \forall x \in R^l$, $f(x)$, $b(x,y,z)\ \forall (y,z) \in R \times R^l$, відповідно. Далі апроксимуємо рівняння (7) рівняннями з гладкими коефіцієнтами. За цими "зглаженими" рівняннями побудуємо форми, які породять оператори для "зглажених" рівнянь, дослідимо властивості цих операторів і встановимо розв'язність "зглажених" рівнянь, а потім, використовуючи апріорні оцінки, перейдемо до границі.

Отже, розглянемо рівняння

$$\lambda u - d \circ a^{m,n} \circ du + b^{m,n}(x,u,\nabla u) = f,$$
$$\lambda > 0,\ \forall f \in L^{\infty} \cap L^1, \tag{8}$$

і форму

$$h_{\lambda}^{p,mn}(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle + \langle dv \circ a^{m,n} \circ du\rangle + \langle b^{m,n}, v\rangle. \tag{9}$$

Мають місце такі леми.

Лема 8. Форма $h_{\lambda}^{p,mn}(u,v)$, що визначається рівністю (7), обмежена і коерцитивна.

Д о в е д е н н я. Покладемо в (7) $v = u|u|^{p-2}$ і, діючи аналогічно наведеному вище, матимемо

$$h_{\lambda}^{p,mn}(u,u|u|^{p-2}) = \lambda\|u\|_p^p +$$
$$+ (p-1)\langle du \circ a^{m,n} \circ du, |u|^{p-2}\rangle + \langle b^{m,n}, u|u|^{p-2}\rangle.$$

Нехай $W = u|u|^{\frac{p-2}{2}}$ і

$$|h_{\lambda}^{p,mn}(u)| \leq \lambda\|W\|_2^2 + 4\frac{(p-1)}{p^2}\|\nabla W\|_2^2 +$$
$$+ K_1\|W\|_2^2 + K_2\beta\|\nabla W\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p,$$

де використані нерівності Юнга, Коші та очевидні властивості норм і форм-обмеженостей, а також

$$|\langle b^{m,n}(x,u,\nabla u), u|u|^{p-2}\rangle| \leq \langle \mu_1|\nabla u| + \mu_2|u| +$$
$$+ \mu_3, u|u|^{p-2}\rangle \leq \frac{2}{p}\|\nabla W\|_2\|\mu_1 W\|_2 +$$
$$+ \|\mu_2 W\|_2\|W\|_2 + (\|W\|_2^2)^{\frac{p-1}{p}}\|\mu_3\|_p \leq$$
$$\leq \frac{1}{p}(\|\nabla W\|_2^2 + \beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\|W\|_2^2 + \beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2) +$$
$$+ \frac{1}{q}\|W\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p \leq \left(\frac{1}{p} + \beta\frac{3}{2}\right)\|\nabla W\|_2^2 +$$
$$+ \left(\frac{c(\beta)}{p} + \frac{c(\beta)}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{q}\right)\|W\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\mu_3\|_p^p,$$

тобто форма $h_\lambda^{p,mn}$ обмежена. З доведення попередніх лем коерцитивність очевидна, тобто

$$\lim_{\||u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}\to\infty}\frac{h_\lambda^{p,mn}(u,u|u|^{p-2})}{\|u|u|^{p-2}\|_{W_1^q}}=\infty .$$

Наслідок. Форма $h_\lambda^{p,mn}$ породжує обмежений коерцитивний оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$ з нормою $\|A_\lambda^{p,mn}(u)\|_{W_{-1}^p}=\sup\limits_{v\in W_1^q}\dfrac{h_\lambda^{p,mn}(u,v)}{\|v\|_{W_1^q}}$.

Лема 9. Оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$ – хемінеперервне відображення.

Доведення. За визначенням, оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$ називається хемінеперервним W_1^p, якщо

$$\omega\xrightarrow[t\downarrow 0]{}\lim A_\lambda^{p,mn}(x+ty)=A_\lambda^{p,mn}(x)\ \ \forall x,y\in W_1^p,$$

тому, враховуючи умови (2) і обмеженість оператора $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$, одержуємо

$$\omega\xrightarrow[t\downarrow 0]{}\lim A_\lambda^{p,mn}(u+tv)=A_\lambda^{p,mn}(u)\ \ \forall u,v\in W_1^p,$$

оскільки

$$|\langle b^{m,n}(x,u+tv,\nabla u+t\nabla v),\omega\rangle-\langle b^{m,n}(x,u,\nabla u),\omega\rangle|\le$$
$$\le|\langle\mu_4|tv|+\mu_5|t\nabla v|,\omega\rangle|\xrightarrow[t\downarrow 0]{}0\ \ \forall\omega\in W_1^q.$$

Наслідок. Форма $h_\lambda^{p,mn}(u,v)$ і оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$ замкнуті. Оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to\to W_{-1}^p$ – акретивне в L_p відображення.

Доведення. За визначенням, оператор $A_\lambda^{p,mn}:W_1^p\to W_{-1}^p$ акретивний в L_p, якщо $\langle\tilde A_\lambda^{p,mn}(u)-\tilde A_\lambda^{p,mn}(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\ge 0\ \forall u,v\in\in W_1^p$.

Використовуючи нерівності Коші, Гельдера, Юнга умови (2), одержуємо

$$\langle\tilde A_\lambda^{p,mn}(u)-\tilde A_\lambda^{p,mn}(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\ge\lambda\|u-v\|_p^p+$$
$$+(p-1)\langle d(u-v)\circ a^{m,n}\circ d(u-v),|u-v|^{p-2}\rangle+$$
$$+\langle b^{m,n}(x,u,\nabla u)-b^{m,n}(x,v,\nabla v),\ (u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\ge$$
$$\ge K_3\|W\|_2^2+K_4\|\nabla W\|_2^2\ge 0,$$

де $\exists K_3,K_4>0$.

Оскільки

$$\langle b^{m,n}(x,u,\nabla u)-b^{m,n}(x,v,\nabla v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\le$$
$$\le|\langle\mu_4W,W\rangle|+|\langle\mu_5\nabla W,W\rangle|,$$

то внаслідок нерівностей

$$|\langle\mu_4W,W\rangle|\le\|W\|_2\|\mu_4W\|_2\le$$
$$\le\|W\|_2(\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle+c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac12}\le$$
$$\le\frac12\left(\varepsilon\|W\|_2^2+\frac1\varepsilon(\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle+c(\beta)\|W\|_2^2\right)\le$$
$$\le\frac12\left(\sqrt\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle+\left(\sqrt\beta+\frac{c\sqrt\beta}{\sqrt\beta}\right)\|W\|_2^2\right),$$

$$|\langle\mu_5\nabla W,W\rangle|\le\langle dW\circ a\circ dW\rangle^{\frac12}(\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle+$$
$$+c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac12}\le\frac12\left(2\sqrt\beta\langle dW\circ a\circ dW\rangle+\frac{c(\beta)}{\sqrt\beta}\|W\|_2^2\right),$$

маємо

$$\langle\tilde A_\lambda^{p,mn}(u)-\tilde A_\lambda^{p,mn}(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\ge\lambda\|W\|_2^2+$$
$$+\frac{4}{p^2}(p-1)\langle dW\circ a^{m,n}\circ dW\rangle-\frac2p\langle\mu_5|\nabla W|,W\rangle-$$
$$-\langle\mu_4W,W\rangle\ge\left(\lambda-\frac12\sqrt\beta-\frac{c(\beta)}{\sqrt\beta}\right)\|W\|_2^2+$$
$$+\left(\frac{4}{p^2}(p-1)-\frac32\sqrt\beta\right)\langle dW\circ a\circ dW\rangle\ge 0,$$

тобто

$$\langle\tilde A_\lambda^{p,mn}(u)-\tilde A_\lambda^{p,mn}(v),(u-v)|u-v|^{p-2}\rangle\ge 0$$
$$\forall u,v\in W_1^p,$$

де $W=(u-v)|u-v|^{\frac{p-2}{2}}$ і знак рівності справедливий лише у випадку $u\equiv v$.

Теорема 2. Рівняння (1) за умов (2) однозначно розв'язне в $W_1^p\ \ \forall f\in W_{-1}^p$.

Доведення. Спочатку доведемо, що рівняння (6) має єдиний розв'язок $\forall n \in N$ і $\forall m \in R^+$.

Нехай $\{v_i\}$ і $\{v_i^*\}$ — гладкі базиси просторів $W_{1,0}^p, W_{1,0}^{p'}$, відповідно, і нехай $[v_1, ..., v_k]$ — лінійна оболонка базисних елементів $\langle u_k, u_k^* \rangle = \| u_k \|_p^p$. Покладемо, за визначенням, $u_k = \sum_{i=1}^k c_i v_i$, $u_k^* = \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^*$ [5, 6]. Для знаходження послідовності Гальоркіна складемо систему рівнянь

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_k) - f, v_i^* \rangle = 0, \ i = 1, ..., k. \qquad (10)$$

Система (6) визначає неперервне відображення $\bar{B} : R^k \to R^k$, отже, має місце лема "про гострий кут". Нехай на сфері $S_R = (\bar{C} : |\bar{C}| = R)$, де $R > 0$ — деяке відповідно вибране число, що можливо завдяки властивості коерцитивності оператора, і виконується умова "гострого кута" $\langle \bar{B}(\bar{C}), \bar{C}^* \rangle \geq 0$. Тоді існує принаймні одна точка $\bar{C}, |\bar{C}| \leq R$, така, що $\bar{B}(\bar{C}) = 0$.

Далі будемо реалізовувати аналог методу Гальоркіна, тобто покажемо, що система (10) має розв'язок у лінійній оболонці перших n елементів базису $\{v_i\}$. Дійсно, відображення $\bar{B}(\bar{C}) : 0 \subset B_i(\bar{C}) = \langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_k) - f, v_i^* \rangle$, $i = 1, ..., k$, внаслідок коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ задовольняє умови леми "про гострий кут":

$$\langle \bar{B}(\bar{C}), \bar{C}^* \rangle = \langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}\left(\sum_{i=1}^k c_i v_i\right) - f, \sum_{i=1}^k c_i^* v_i^* \rangle =$$

$$= \langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_k) - f, u_k |u_k|^{p-2} \rangle \geq$$

$$\geq \left(\frac{h_\lambda^{p,mn}(u_k, u_k |u_k|^{p-2})}{\| u_k |u_k|^{p-2} \|_{W_1^{p'}}} - \| f \|_{W_{-1}^p} \right) \| u_k | u_k |^{p-2} \|_{W_1^{p'}} \geq 0.$$

Оскільки $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ — неперервне відображення на скінченних підпросторах простору $W_{1,0}^p$, має місце існування точки $\bar{C}, |\bar{C}| = R$, $\bar{B}(\bar{C}) = 0$ внаслідок леми "про гострий кут" для достатньо великих $R > 0$.

Отже, ми фактично вказали спосіб побудови послідовності $\{u_k(x)\}$, такої, що є розв'язками систем (10), тобто далі доведемо, що послідовність $\{u_k(x)\}$ збігається до розв'язку рівняння (1). Використовуючи умову коерцитивності оператора $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$, одержуємо, що $\| \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_k) \|_{W_{-1}^p} \leq \| f \|_{W_{-1}^p}$. Якщо нами буде доведено, що $\| u_k \|_{W_{-1}^p} < C$, де стала залежить лише від структури рівняння, то, внаслідок слабкої компактності $W_1^p(R^l, d^l x)$, існує підпослідовність $(u_{k'}(x))$, така, що при $u_{k'} \xrightarrow[W_1^p]{} u_0$ слабко $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_{n'}) \xrightarrow[W_1^p]{} y$ теж слабко.

Покажемо, що $y = \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_0) = f$. Звідси буде випливати, що відображення $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ є сюр'єкцією, або "відображенням на". Для того щоб довести останнє твердження, складемо "інтегральні тотожності"

$$\langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_{k'}) v_i^* \rangle = \langle f, v_i^* \rangle, \ i = 1, ..., k'. \qquad (11)$$

Перейшовши в (11) до границі при $k' \to +\infty$, одержимо $\lim_{n \to \infty} \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_{k'}) = y = f$ (границя по нормі W_{-1}^p). Оскільки оператор $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ акретивний в L^p, то $\langle \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_{k'}) - \mathrm{A}_\lambda^p(v), (u_{k'} - v)|u_{k'} - v|^{p-2} \rangle \geq 0$ і в останній нерівності, переходячи до границі при $k' \to \infty$, одержуємо $\langle y - \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(v), (u_0 - v)|u_0 - v|^{p-2} \rangle \geq 0$. Покладаючи $v = u_0 - tz, t > 0$ $\forall z \in W_{1,0}^p$ і далі скорочуючи обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, знаходимо, що $\langle y - \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_0 - tz), z|z|^{p-2} \rangle \geq 0$. Використовуючи хемінеперервність оператора $\mathrm{A}_\lambda^{p,mn} : W_1^p(R^l, d^l x) \to W_{-1}^p(R^l, d^l x)$ та довільність вибору елемента $z \in W_{1,0}^p$, одержуємо, що $y = \mathrm{A}_\lambda^{p,mn}(u_0) = f$, тобто для заданих початкових даних ми побудували послідовність $\{u_{k'}\}$ і довели її збіжність до елемента $u_0 \in W_{-1}^p$, такого, що реалізує розв'язок рівняння (8) за згаданих вище умов. Єдиність розв'язку випливає з властивості акретивності оператора $A_\lambda^{p,mn}(\cdot)$. Дійсно, покажемо, що цей розв'язок єдиний. Доводимо від супротивного. Нехай u_0 і u_0' — два таких розв'язки. Тоді справедливі рівності

$$\langle A_\lambda^{p,mn}(u_0),\omega\rangle = f, \langle A_\lambda^{p,mn}(u_0'),\omega\rangle = f$$

$$\forall\omega\in W_{1,0}^{p'}(R^l,d^lx),$$

тобто $\langle A_\lambda^{p,mn}(u_0)-A_\lambda^{p,mn}(u_0'),\omega\rangle = 0$.

Поклавши $\omega=(u_0-u_0')|u_0-u_0'|^{p-2}$, отримаємо

$$0=\langle A_\lambda^{p,mn}(u_0)-A_\lambda^{p,mn}(u_0'),(u_0-u_0')|u_0-u_0'|^{p-2}\rangle\ge$$

$$\ge\lambda\|u_0-u_0'\|_p^p+(p-1)\langle d(u_0-u_0')\circ a\circ d(u_0-u_0'),$$

$$|u_0-u_0'|^{p-2}\rangle-\|\mu_4\|_\infty\|u_0-u_0'\|_p^p-$$

$$-\|\mu_5\|_\infty\langle\nabla(u_0-u_0'),|u_0-u_0'|^{p-1}\rangle\ge 0,$$

а це внаслідок строгої акретивності означає, що $u_0=u_0'$. Отже, рівняння (8) має єдиний розв'язок.

Припустимо, що розв'язки $u^{m,n}(x)$ рівномірно обмежені, тобто $\|u^{m,n}(x)\|_{W_1^p}<c$. Внаслідок коерцитивності оператора $A_\lambda^p: W_1^p(R^l,d^lx)\to$ $\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ одержуємо $\|A_\lambda^p(u^{m,n})\|_{W_{-1}^p}\le\|f\|_{W_{-1}^p}$. Отже, в силу слабкої компактності W_1^p існує послідовність $n'=(m',n')$, така, що

$$u^{n'}\xrightarrow[W_1^p]{\omega}u_0,\ A_\lambda^p(u^{n'})\to y,\ n'=(m',n')\to\infty.$$

Достатньо показати, що $A_\lambda^p(u_0)=f$. Дійсно, перейдемо до границі в тотожності

$$\langle(A_\lambda^p(u_{n'})-A_\lambda^p(u_{n'})+A_\lambda^p(u_{n'})),v\rangle=\langle f^{n'},v\rangle,$$

але $\lim\limits_{n'\to\infty}\langle(A_\lambda^p(u_{n'})-A_\lambda^p(u_{n'})),v\rangle=0$ внаслідок властивостей апроксимації та умов (2). Тому одержуємо $\omega\xrightarrow[n'\to\infty]{}A_\lambda^p(u^{n'})=y=f$, а з іншого боку, маємо

$$\langle A_\lambda^p(u^{n'})-A_\lambda^p(v),(u^{n'}-v)|u^{n'}-v|^{p-2}\rangle\ge 0 \quad (12)$$

внаслідок акретивності оператора $A_\lambda^p: W_1^p(R^l,$ $d^lx)\to W_{-1}^p(R^l,d^lx)$ в $L_p(R^l,d^lx)$. Покладемо в (12) $v\equiv u_0-tz\ \forall z\in W_{1,0}^p$ і, скоротивши обидві частини одержаної нерівності на t^{p-1}, матимемо, що $\langle A_\lambda^p(u^{n'})-A_\lambda^p(u_0-tz),z|z|^{p-2}\rangle\ge 0$. Оскільки оператор $A_\lambda^p: W_1^p\to W_{-1}^p$ хемінеперервний, то, переходячи до границі при $n'\to\infty$ і $t\to 0$, остаточно знаходимо $y=A_\lambda^p(u_0)=f$, тобто рівняння (1) має єдиний розв'язок в W_1^p $\forall f\in W_{-1}^p$. Для остаточного доведення потрібно встановити апріорну оцінку $\|u^{m,n}\|<c$.

Теорема 3. Узагальнені розв'язки рівняння (1) рівномірно обмежені в $W_1^p(R^l,d^lx)$ за умов (2).

Д о в е д е н н я. Складемо інтегральні тотожності

$$\lambda\langle u^{m,n},\xi\rangle+\langle d\xi\circ a^{m,n}\circ du^{m,n}\rangle+$$

$$+\langle b^{m,n}(x,u^{m,n},\nabla u^{m,n}),\xi\rangle\equiv\langle f^{m,n},\xi\rangle, \quad (13)$$

$$\sum_{r=1}^{l}\lambda\langle u^{m,n(a)},\xi\rangle+\langle d\xi\circ a^{m,n(r)}\circ du^{m,n}\rangle+$$

$$+\langle d\xi\circ a^{m,n}\circ du^{m,n(r)}\rangle+\langle b^{m,n(r)}+$$

$$+b_u^{m,n}u^{m,n(r)}+b_{\nabla u}^{m,n}\circ\nabla u^{m,n(r)},\xi\rangle\equiv\langle f^{m,n(r)},\xi\rangle, \quad (14)$$

де індекс (r) в тотожності (14) означає диференціювання по аргументу x^r.

Поклавши в (13) $\xi=u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}$ і в (14) $\xi=u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}$, одержимо

$$\lambda\langle u^{m,n},u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle+\frac{4(p-1)}{p^2}\times$$

$$\times\left\langle d\left(u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a\circ d\left(u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle+$$

$$+\langle b^{m,n},u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle\equiv\langle f^{m,n},u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle.$$

Внаслідок умов (2) і використовуючи нерівності Юнга, Гельдера, одержуємо при $W=$ $=u^{m,n}|u^{m,n}|^{\frac{p-2}{2}}$:

$$|\langle b^{m,n},u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle|\le$$

$$\le \int_{R^l}\int_{R^l} |b^{m,n}(t)|\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \le$$

$$\le \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_1^m(t)\nabla u^{m,n}(x) + \mu_2^m(t)u^{m,n}(x) +$$

$$+ \mu_3^m(t))\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \le$$

$$\le \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_1^m(t)|\nabla u^{m,n}(x)|\rho_n(x-t)\times$$

$$\times u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx +$$

$$+ \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_2^m(t)|u^{m,n}(x)|\rho_n(x-t)\times$$

$$\times u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx +$$

$$+\int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_3^m(t)\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx \le$$

$$\le \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_1^m(t)|\nabla W(x)|\rho_n(x-t)W(x)dtdx +$$

$$+ \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_2^m(t)W^2(x)\rho(x-t)dtdx +$$

$$+ \int_{R^l}\int_{R^l} (\mu_3^m(t)\rho_n(x-t)u^{m,n}(x)|u^{m,n}(x)|^{p-2}dtdx,$$

$$\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\rho_n(x-t)|W(x)|^2dx\right) =$$

$$= \int_{R^l}\left(\int_{R^l}\mu_2^m(t)dt\right)\rho_n(x)W^2(x-t)dx =$$

$$= \int_{R^l}\rho_n(x)\int_{R^l}(\mu_2^m(t)W^2(x-t)dt)dx \le$$

$$\le \int_{R^l}\rho_n(x)(\beta\|\nabla W(x)\|_2^2 + c(\beta)\|\nabla W(x)\|_2^2)dx =$$

$$= \beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|\nabla W\|_2^2,$$

$$\int_{R^l}\int_{R^l}\mu_1^m(t)|\nabla W(x)|\rho_n(x-t)W(x)dtdx \le$$

$$\le \left(\int_{R^l}\int_{R^l}\rho_n(x-t)|W(x)|^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\int_{R^l}\int_{R^l}\rho_n(x-t)(\mu_1^m(t)|W(x)|)^2dtdx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі знову використовуємо рівність

$$\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\rho_n(x-t)W^2(x)dx(\mu_1^m(t))^2dt\right) =$$

$$= \int_{R^l}\left(\int_{R^l}(\mu_1^m(t))^2dt\right)\rho_n(x)|W(x-t)|^2dx =$$

$$= \int_{R^l}\rho_n(x)\int_{R^l}(\mu_1^m(t)|W(x-t)|^2dt)dx \le$$

$$\le \int_{R^l}\rho_n(x)(\beta\|\nabla W(x-t)\|_2^2 + c(\beta)\|W(x)\|_2^2)dx =$$

$$= \beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2.$$

Використовуючи властивості “зрізки” і апроксимації функції f і нерівності Гельдера до правої частини тотожності (12), одержуємо

$$|\langle f^{m,n}u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\rangle| \le \|f^{m,n}\|_p\|u^{m,n}|u^{m,n}|^{p-2}\|_q \le$$

$$\le \|f^n\|_p\|u^{m,n}\|^{p-1} \le \|f\|_p\|u^{m,n}\|_p^{p-1}.$$

Далі, завдяки нерівності Юнга для достатньо великих m і n одержуємо $\|u^{m,n}\|_p^p \le$ $\le c(\lambda,\rho,l,\lambda_0)\|f\|_p^p$.

Згідно з (13) і переробляючи аналогічні викладки, що були застосовані при знаходженні оцінки для $\|\nabla u^{m,n}\|_p^p$ [8], знайдемо аналогічну оцінку для $\|\nabla u^{m,n}\|_p^p$. Підставляючи $\xi =$ $= u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}$ в (14), маємо

$$\sum_{r=1}^{l}\Bigg(\lambda\langle u^{m,n(r)}, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle + \frac{4}{p^2}(p-1)\times$$

$$\times\left\langle d\left(u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a^{m,n}\circ d\left(u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\right\rangle +$$

$$+\left\langle d\left(u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\circ a^{m,n(r)}\circ du^{m,n}\right\rangle +$$

$$+\langle b^{m,n(r)} + b_u^{m,n}u^{m,n(r)} + b_{\nabla u}^{m,n}\circ\nabla u^{m,n(r)},$$

$$u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle = \sum_{r=1}^{l}\langle f^{m,n(r)}, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle.$$

Вводячи позначення $W \equiv u^{m,n(r)} u^{m,n(r)} |^{\frac{p-2}{2}}$ і використовуючи умову $|a^r| \le \mu_1^r(x)$, одержуємо

$$|\langle d(u^{m,n(r)} | u^{m,n(r)} |^{p-2}) \circ a^{m,n(r)} \circ du^{m,n} \rangle| \le$$

$$\le \tilde{c}_0 \int_{R^l} \int_{R^l} |\nabla W(x)| |W(x)| \rho_n(x-t) \mu_1^2(t) dt dx \le$$

$$\le \tilde{c}_0 \left(\int_{R^l} \int_{R^l} |\nabla W(x)|^2 \rho_n(x-t) dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(x-t) (\mu_1^2(t) |W(x)|)^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (\beta \|\nabla W\|_2^2 + c(\beta) \|W\|_2^2) c_0 .$$

Встановимо оцінки

$$|\langle b^{m,n} u^{m,n(r)}, u^{m,n(r)} | u^{m,n(r)} |^{p-2} \rangle| \le$$

$$\le \int_{R^l} \int_{R^l} |(\mu_9(t)| |\nabla u^{m,n}| + \mu_{10}(t) |u^{m,n}| +$$

$$+ \mu_{11}(t) |u^{m,n(r)} u^{m,n(r)}| \, u^{m,n(r)} |^{p-2} \rho_n(t-x) dt dx \le$$

$$\le \int_{R^l} \int_{R^l} \mu_9(t) \rho_n(t-x) |\nabla u^{m,n}| W^2(x) dt dx +$$

$$+ \int_{R^l} \int_{R^l} \mu_{10}(t) \rho_n(t-x) |u^{m,n}| W^2(x) dt dx +$$

$$+ \int_{R^l} \int_{R^l} \mu_{11}(t) \rho_n(t-x) W^2(x) dt dx \le$$

$$\le \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) (\mu_9(t) W^2(x) dt dx \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) \, |\nabla u^{m,n}|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) (\mu_{10}(t) W^2(x))^q dt dx \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) \, |u^{m,n}|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} + \|W\|_2^2 \|\mu_{11}\|_\infty \le$$

$$\le \left(\left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) (\mu_9(t))^{q\alpha} dt dx \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) W^{2q\beta}(x) dt dx \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|\nabla u^{m,n}\|_p +$$

$$+ \left(\left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) \mu_{10}^{q\alpha}(t) dt dx \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\int_{R^l} \int_{R^l} \rho_n(t-x) W^{2q\beta}(x) dx dt dx \right) \right)^{\frac{1}{q}} \|u^{m,n}\|_p +$$

$$+ \|W\|_2^2 \|\mu_{11}\|_\infty .$$

Підберемо α і β відповідним чином, тобто

$$\beta = \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}, \ \alpha = 1 - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} .$$

Отже, маємо

$$|\langle b_u^{m,n} u^{m,n(r)}, u^{m,n(r)} | \, u^{m,n(r)} |^{p-2} \rangle| \le$$

$$\le \|\nabla u^{m,n}\|_p \|W\|_2^{\frac{2}{q}} \|\mu_9\|_{\frac{q}{p}}^{\frac{1}{q} \cdot \frac{p}{q}} +$$

$$+ \|\nabla u^{m,n}\|_p \|W\|_2^{\frac{2}{q}} \|\mu_{10}\|_{\frac{q}{p}}^{\frac{p}{q^2}} + \|W\|_2^2 \|\mu_{11}\|_\infty \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\varepsilon^p} \|\nabla u^{m,n}\|_p^p + \varepsilon^q \|W\|_2^2 \right) \|\mu_9\|_{\frac{q}{p}}^{\frac{p}{q^2}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\vartheta^p} \|u^{m,n}\|_p^p + \vartheta^q \|W\|_2^2 \right) \|\mu_{10}\|_{\frac{q}{p}}^{\frac{p}{q^2}} + \|W\|_2^2 \|\mu_{11}\|_\infty .$$

Оцінимо наступний член нерівності:

$$|\langle b_{\nabla u}^{m,n} \circ \nabla u^{m,n(r)}, u^{m,n(r)} | u^{m,n(r)} |^{p-2} \rangle| \le$$

$$\le \int_{R^l} \int_{R^l} \tilde{\mu}_1(t) |\nabla u^{m,n(r)}(x)| \, u^{m,n(r)} |u^{m,n(r)}|^{p-2} \times$$

$$\times \rho_n(t-x) dt dx \le$$

$$\le K \int_{R^l} \int_{R^l} \tilde{\mu}_1(t)) \rho_n(t-x) |W(x)| |\nabla W(x)| \, dt dx \le$$

$$\le \int_{R^l} \int_{R^l} (\tilde{\mu}_1(t))^2 dt \, \rho_n(x) |W(t-x)|^2 \, dx =$$

$$= \int_{R^l} (\rho_n(x) \int_{R^l} (\tilde{\mu}_1(t) |W(t-x)|)^2 dt) dx \le$$

$$\leq \int_{R^l} (\rho_n(x)(\beta\|\nabla W(x)\|_2^2 + c(\beta)\|W(x)\|_2^2)dx =$$

$$= \beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2.$$

Отже, маємо нерівність

$$|\langle b_{\nabla u}^{m,n} \circ \nabla u^{m,n(r)}, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq K\|\nabla W\|_2(\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \tilde{K}_1\|\nabla W\|_2^2 + \tilde{K}_2\|\nabla W\|_2^2,$$

а також оцінки

$$|\langle b^{m,n(r)}, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq \langle \mu_6(x)|u\nabla^{m,n}|, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle +$$

$$+ \langle \mu_7(x)|u^{m,n}|, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle +$$

$$+ \langle \mu_8(x), u^{m,n}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle \leq$$

$$\leq \|W\|_2\left(\int_{R^l}\left(\int_{R^l}\rho_n(x-t)|\nabla u^{m,n}|^p dx\right)\mu_6^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon}\beta\|\nabla W\|_2^2 + \left(\frac{c(\beta)}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|W\|_2^2,$$

$$\int_{R^l}\int_{R^l}\mu_7(t)|u^{m,n}(x)|\rho_n(t-x) \times$$

$$\times u^{m,n(r)}(x)|u^{m,n(r)}(x)|^{p-2}dtdx \leq$$

$$\leq \|W\|_2\left((\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{p-2}{2p}}\|u^{m,n}\|_p\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|W\|_2^2 + \frac{1}{2}(\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2)^{\frac{p-2}{p}}\|u^{m,n}\|_p^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|W\|_2^2 + \frac{1}{2}(\beta\|\nabla W\|_2^2 + c(\beta)\|W\|_2^2)\varepsilon^{\frac{p-2}{p}} +$$

$$+ \|u^{m,n}\|_p^p\varepsilon^{-p}\frac{1}{p} \leq \mathrm{const}(\beta\|\nabla W\|_2^2 +$$

$$+ N_1\|W\|_2^2) + N_2\|u^{m,n}\|_p^p.$$

Аналогічно оцінюється і права частина тотожності (14)

$$|\sum_{r=1}^{l}\langle f^{m,n(r)}, u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{p-2}\rangle| \leq$$

$$\leq (p-1)|\sum_{r=1}^{l}\langle f^{m,n}, |u^{m,n(r)}|^{p-2}(u^{m,n(r)})^{(r)}\rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{r=1}^{l}\|f^{m,n}|u^{m,n(r)}|^{\frac{p-2}{2}}\|_2 \times$$

$$\times \frac{2(p-1)}{p}\|\nabla\left(u^{m,n(r)}|u^{m,n(r)}|^{\frac{p-2}{2}}\right)\|_2.$$

Об'єднуючи одержані нерівності і отримуючи параметри, маємо нерівність $\|\nabla u^{m,n}\|_p^p \leq$ $\leq \mathrm{const}(\lambda, \lambda_0, \rho, \varepsilon, p, l, \mu_i)\|f\|_p^p$, тобто вірна оцінка $\|u^{m,n}\|_{W_1^p} < c$. Теорема 3 доведена.

Зауваження. З викладеного вище випливає, що інтегральна тотожність

$$h_\lambda^p(u_n, v) \equiv \langle f, v\rangle$$

$$\forall v \in L(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*),\ u_n \in L(v_1, \ldots, v_n)$$

породжує операторне рівняння $A_\lambda^p(u_n) = f$, розв'язне відносно u_n в $L(v_1, \ldots, v_n)$.

Внаслідок вкладання $L(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ в $W_{1,0}^{p'}$ ця тотожність буде справедлива $\forall v \in W_{1,0}^{p'}$, і для $v = -\sum_r \frac{d}{dx_r}\left(\frac{du_n}{du_r}\left|\frac{du_n}{du_r}\right|^{p-2}\right)$ матимемо тотожність, яку одержуємо з рівнянь (10) сумуванням по r від I до l, що виправдовує запропонований вище метод отримання апріорної оцінки $\|u_n\|_{W_1^p} < C$.

Нехай $p > 2$. Тоді справедлива така теорема.

Теорема 4. Якщо структура рівняння (1) задовольняє умови (2), то воно однозначно розв'язне в просторі $W_1^p(R^l, d^l x)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки форма $h_\lambda^p(u, v)$ $\forall u \in W_1^p$ і $\forall v \in W_{1,0}^{p'}$ згідно з лемами 1–3 породжує обмежений, слабо неперервно діючий оператор $A_\lambda^p : W_1^p \to W_{-1}^p$, акретивний в L^p, то завдяки неперервності і щільності вкладення $W_1^p \subset L^p \subset W_{-1}^p$ рівняння $\tilde{A}_\lambda^p(u) = f \quad \forall f \in L^p$ розв'язне в $D(\tilde{A}_\lambda^p)$. Дійсно, позначимо оператор $\tilde{A}_\lambda^p : D(\tilde{A}_\lambda^p) \to L^p$ через A і вивчимо оператор R_λ – резольвенту оператора $I - \lambda A$.

Очевидно, $v(\xi \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{I} - v\mathrm{A}$, де $\xi = v^{-1}$. Покажемо, що оператор $\xi \mathrm{I} - \mathrm{A}$ зворотний на всьому просторі L^p.

Дійсно, внаслідок акретивності оператора $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p : D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p) \to L^p$ справедлива нерівність

$$\langle (\mathrm{I} - \mathrm{A})(u) - (\mathrm{I} - \mathrm{A})(v), (u - v)(u - v)^{p-2} \rangle =$$

$$= ||u - p||_{L^p}^p - \langle \mathrm{A}(u) - \mathrm{A}(v), (u - v)(u - v)^{p-2} \rangle \geq$$

$$\geq ||u - p||_{L^p}^p \quad \forall u, v \in D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p),$$

через те що

$$- \langle \mathrm{A}(u) - \mathrm{A}(v), (u - v)(u - v)^{p-2} \rangle =$$

$$= \langle \tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p(u) - \tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p(u), (u - v)|u - v|^{p-2} \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda > \lambda_0 > 0$$

внаслідок акретивності $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p : D(\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p) \to L^p$.

Отже, оператор $(\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = R_1$ існує, причому $||R_1||_{Lip} \leq 1$.

Далі розглянемо рівняння $(\xi \mathrm{I} - \mathrm{A})(u) = f$ $\forall f \in L^p$, або, що те ж саме, $(\mathrm{I} - \mathrm{A})(u) + (\xi - 1)u = f$, звідки $u = R_1(f + (1 - \xi)u)$.

Розглянемо оператор $T(u) = R_1(f + (1 - \xi)u)$. Очевидно, що $T(u)$ має нерухому точку. Це значить розв'язність рівняння $(\xi \mathrm{I} - \mathrm{A})(u) = f$ $\forall f \in L^p$ в інтервалі $|1 - \xi| < 1$. Замінивши в попередньому міркуванні R_1 на R_ξ при $|1 - \xi| < 1$, одержимо розв'язність рівняння $(\xi \mathrm{I} - \mathrm{A})(u) = f$ $\forall f \in L^p$ для $|1 - \xi| < 2$ і т. д., що означає розв'язність цього рівняння $\forall \xi > 0$, а це призводить до розв'язності рівняння $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p(u) = f$ $\forall f \in L^p$, $\lambda > \lambda_0(p, ||\mu_1^u||_\infty, \varepsilon)$.

Наслідок. Розв'язність рівняння $\tilde{\mathrm{A}}_\lambda^p(u) = f$ $\forall f \in L^p$ означає, що $R(A_\lambda^p \wedge L^p) = L^p$.

Зауваження. У випадку $D(\tilde{\mathrm{A}}_{\lambda\beta}^p) \neq L^p$, приводячи рівняння $\tilde{\mathrm{A}}_{\lambda\beta}^p(u) = f$ $\forall f \in D(\tilde{\mathrm{A}}_{\lambda\beta}^p)$ до вигляду $u + \tilde{\mathrm{A}}_{\lambda-\varepsilon\beta}^p(u) = f + u(1 - \varepsilon_1)$ і діючи аналогічно до попереднього, одержуємо розв'язність рівняння $\tilde{\mathrm{A}}_{\lambda\beta}^p(u) = f$ $\forall f \in D(\tilde{\mathrm{A}}_{\lambda\beta}^p)$ при $\lambda > \lambda_0$, $0 < \varepsilon_1 < 1$.

Висновки

У даній статті вперше доведено існування розв'язків рівняння (1) за умов (2).

Рівняння (1) не задовольняє умову сильної коерцитивності $||L(x,u)||_{L_p} \geq C||u||_{W_1^{p'}}$ розв'язку задачі Діріхле "в малому". У своїй основі запропонований метод є аналогом методу Лере–Мінті–Лионса–Браудера, але для відображення $\mathrm{A}_\lambda^p : W_1^p \to W_{-1}^p$ він використовується в даному вигляді вперше.

Запропонований у даній статті метод може бути доопрацьований для рівнянь більш загального типу.

$\boxed{\text{Н.М. Кухарчук}}$, Н.И. Яременко

РАЗРЕШИМОСТМ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАТРИЦЕЙ ГИЛЬБЕРГА–СЕРРИНА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Статья посвящена исследованию квазилинейного уравнения во всем евклидовом пространстве R^l, $l \geq 3$. Расширено понятие решения – вместо условия сильной коэрцитивности введено условие слабой коэрцитивности. Показано, что данное уравнение не удовлетворяет условиям существования решения "в малом".

$\boxed{\text{M.M. Kukharchuk}}$, M.I. Yaremenko

ON A SINGLE SOLVABILITY OF EQUATION WITH MATRIX OF GILBURG-SERIN IN SOBOL'S SPACES

In this paper, we study the second-order quasilinear elliptic equations with slow-increasing coefficients on the Euclidean space R^l,, $l \geq 3$. We significantly broaden the concept of equation by introducing the weak coercitivity instead of the strong one. Our results show that this equation doesn't satisfy the existence conditions of the solution "in the small".

1. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про розв'язність квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з нелінійністю типу кулонівського потенціалу // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2007. – № 6. – С. 151–155.
2. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про однозначну розв'язність рівняння $\lambda u - ad^2 u + \tilde{s}du = f$, $\lambda > 0$, та побудову нелінійної півгрупи стиску // Там же. – № 5. – С. 148–157.
3. *Кухарчук М.М., Яременко М.І.* Про однозначну розв'язність рівняння $(\lambda - ad^2)u = f$ // Там же. – № 3. – С. 150–157.
4. *Кухарчук М.М.* Про розв'язність квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в R^l // Там же. – 2004. – № 2. – С. 145–158.
5. *Кухарчук Н.М.* О принадлежности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений в дивергентной форме с разрывными коэффициентами пространству $L^\infty(R^l, d^l u) \cap W_p^1(R^l, d^l u) n \cap W_2^2(R^l, d^l u)$. – К., 1986. – 48 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 36.13).
6. *Кухарчук Н.М.* О гладкости обобщенных решений нелинейных равномерно эллиптических уравнений. – К., 1986. – 12 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, 03.01.86, № 156.
7. *Кухарчук Н.М.* Разрешимость квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми медленно растущими коэффициентами в пространствах $W_p^1(R^l, d^l u)$, $p \geq 2$. – К., 1988. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 88.61).

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
14 квітня 2009 року